***Лекция 8***

**УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА**

**Тождества Лагранжа**

Рассмотрим систему материальных точек {$m\_{1},m\_{2},…,m\_{k}, …m\_{n}\} $с идеальными голономными нестационарными связями. Все возможные, в том числе и действительный закон движения точки, то есть ее радиус-вектор, являются функциями независимых обобщенных координат и времени

$$r\_{k}(q\_{1} q\_{2}…q\_{l};t)$$

Вычислим скорость k-той точки:

$$V\_{k}=\dot{r}\_{k}=\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}\dot{q}\_{i}+\frac{∂r\_{k}}{∂t} (\*) $$

Повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу: $k$ от 1 до n, $i$ от 1 до l.

При этом

$$\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}\left(q\_{1}…q\_{l} ; t\right) (\*\*)$$

Докажем ***первое тождество Лагранжа*** $L\_{1}$

$$\frac{∂V\_{k}}{∂\dot{q}\_{i}}=\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}} (L\_{1})$$

Поскольку (\*) - линейная функция $\dot{q}$i с коэффициентами $∂r\_{k}/∂q\_{i} $ , то тождество L1 верно.

 ***Второе тождество Лагранжа*** $L\_{2}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{j}}\right)=\frac{∂V\_{k}}{∂q\_{j}} (L\_{1})$$

доказывается прямым вычислением правой и левой частей тождества.

Дифференцируя (\*\*) по времени, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{j}}\right)=\sum\_{}^{}\frac{∂^{2}r\_{k}}{∂q\_{j}∂q\_{i}}\dot{q}\_{i}+\frac{∂^{2}r\_{k}}{∂q\_{j}∂t}$$

Дифференцируя (\*) по qj, получаем то же выражение

$$\frac{∂V\_{k}}{∂q\_{j}}=\sum\_{}^{}\frac{∂^{2}r\_{k}}{∂q\_{j}∂q\_{i}}\dot{q}\_{i}+\frac{∂^{2}r\_{k}}{∂q\_{j}∂t}$$

Тождество (L2) доказано.

**Уравнение Лагранжа второго рода.**

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы в виде

$$ m\_{k}w\_{k}∙V\_{k}=\left(F\_{k}+R\_{k}\right)∙V\_{k} (1)$$

(повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу: $k$ от 1 до n, $i$ от 1 до *l*).

При нестационарных связях радиусы векторы точек системы являются функциями обобщенных координат и времени $r\_{k}\left(q\_{i},t\right)$. Как было показано, скорость каждой точки складывается из переносной и относительной скоростей

$$V\_{k}= V\_{ke}+V\_{kr}, V\_{ke}= \frac{∂r\_{k}}{∂t}, V\_{kr}=\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}\dot{q}\_{i} (2)$$

Тогда

$$ m\_{k}w\_{k}∙\left(V\_{ke}+V\_{kr}\right)=\left(F\_{k}+R\_{k}\right)∙\left(V\_{ke}+V\_{kr}\right) $$

Переносные и относительные скорости точек независимы, поэтому теорема об изменении кинетической энергии распадается на два соотношения

$$ m\_{k}w\_{k}∙V\_{kr}=F\_{k}∙V\_{kr} (4)$$

$$ m\_{k}w\_{k}∙V\_{ke}=(F\_{k}+R\_{k})∙V\_{ke} (5)$$

 В (4) учтена идеальность связей

$$R\_{k}∙V\_{kr}=0 $$

Покажем, что соотношение (4) приводит к уравнениям Лагранже. Как известно, мощность активных сил выражается через обобщенные силы и скорости

$$F\_{k}∙V\_{kr}=Q\_{i}\dot{q}\_{i}$$

Найдем сумму $ m\_{k}w\_{k}∙\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}$

$$ m\_{k}w\_{k}∙\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}= m\_{k}\dot{v}\_{k}∙\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}=\frac{d}{dt}\left( m\_{k}v\_{k}∙\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}\right)- m\_{k}v\_{k}∙\frac{d}{dt}\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left( m\_{k}v\_{k}∙\frac{∂v\_{k}}{∂\dot{q}\_{i}}\right)- m\_{k}v\_{k}∙\frac{∂v\_{k}}{∂q\_{i}}=\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{q}\_{i}}-\frac{∂T}{∂q\_{i}} (8)$$

Здесь использованы тождества Лагранжа

$$\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}=\frac{∂v\_{k}}{∂\dot{q}\_{i}}, \frac{d}{dt}\frac{∂r\_{k}}{∂q\_{i}}=\frac{∂v\_{k}}{∂q\_{i}} (9)$$

Таким образом

$$\sum\_{i}^{}\left(\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{q}\_{i}}-\frac{∂T}{∂q\_{i}}-Q\_{i}\right)\dot{q}\_{i}=0 (10)$$

Возможные обобщенные скорости $\dot{q}\_{i} не$ только независимы, но и произвольны. Поэтому все скобки обязаны обратиться в ноль.

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{q}\_{i}}-\frac{∂T}{∂q\_{i}}=Q\_{i} \left(i=1,2,…,l\right) (11)$$

Уравнения Лагранжа позволяют получить дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, но оставляют вопрос о реакциях идеальных связей открытым. Обычно для того, чтобы найти реакции, прибегают к уравнениям Ньютона.

 Можно показать, что соотношение (5) позволяет найти реакции идеальных связей.

Уравнения Лагранжа являются алгоритмом для вывода дифференциальных уравнений движения системы.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, нужно:

* + - 1. Записать функцию кинетической энергии Т через обобщенные координаты и скорости
			2. Взять соответствующие производные от Т
			3. Вычислить одним из способов обобщенные силы Qi
			4. Подставив результат в уравнения Лагранжа, мы получим ***l*** штук обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат как функций времени

Уравнение Лагранжа является наиболее универсальным способом вывода дифференциальных уравнений движения голономной системы с идеальными связями, в том числе и не стационарными.

Преимущества и недостатки метода Лагранжа по сравнению с методом Ньютона:

1. Формализм метода Лагранжа, состоящий в том, что задача сводится к дифференцированию функции Т, удобен, но не позволяет увидеть физические законы, как в методе Ньютона.
2. Метод Лагранжа позволяет изначально исключить из рассмотрения реакции идеальных связей, что позволяет быстро получить дифференциальные уравнения движения системы. Для определения этих реакций после интегрирования уравнений придется, однако, вернуться к методу Ньютона.

**Пример**

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника ***методом Ньютона***, пришлось бы:

m2g

x

φ

m1g

*l*

δφ

δx

* учесть реакцию идеальной связи в виде натяжения нити,
* составить одно уравнение поступательного движения тела m1, и два уравнения плоского движения точки m2.
* Из трех уравнений- два будут дифференциальными и одно послужит для определения натяжения нити.

Найдем дифференциальные уравнения ***методом Лагранжа:***

 Система имеет две степени свободы, которым соответствуют обобщенные координаты x, φ и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}=Q\_{x} \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{φ}}-\frac{dT}{dφ}=Q\_{φ} $$

 Обобщенные силы мы нашли раньше

Qx=0 Qφ= -m2g*l*Sinφ

Кинетическую энергию системы T ищем в момент прохождения системой положения равновесия

$$T=\frac{1}{2}\left[m\_{1}\dot{x}^{2}+m\_{2}(\dot{x}+l\dot{φ)}^{2}\right]$$

T не зависит от х:

$$\frac{dT}{dx}=0$$

 и Qx=0, значит

$$\frac{dT}{d\dot{x}}=\left(m\_{1}+m\_{2}\right)\dot{x}+m\_{2}l\dot{φ}Cosφ=Const$$

Замечаем, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси х.

Первое дифференциальное уравнение движения системы получим после дифференцирования

$$\left(m\_{1}+m\_{2}\right)\ddot{x}+m\_{2}l\left(\ddot{φ}Cosφ-\dot{φ}^{2}Sinφ\right)=0$$

 Для получения второго уравнения, найдем соответствующие производные.

$$\frac{dT}{d\dot{φ}}=m\_{2}l(l\dot{φ}+\dot{x}Cosφ)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{φ}}=m\_{2}l(l\ddot{φ}+\ddot{x}Cosφ-\dot{x}\dot{φ}Sinφ)$$

$$\frac{dT}{dφ}=-m\_{2}l\dot{x}\dot{φSinφ}$$

При подстановке во второе уравнение Лагранжа подобные выражения сокращаются, и мы находим второе дифференциальное уравнение движения системы

$$l\ddot{φ}+\ddot{x}Cosφ=-gSinφ$$

При фиксации тела m1 получаем уравнение колебаний математического маятника m2

$$l\ddot{φ}=-gSinφ$$